Pi op het schaakbord **Hans Meijer**

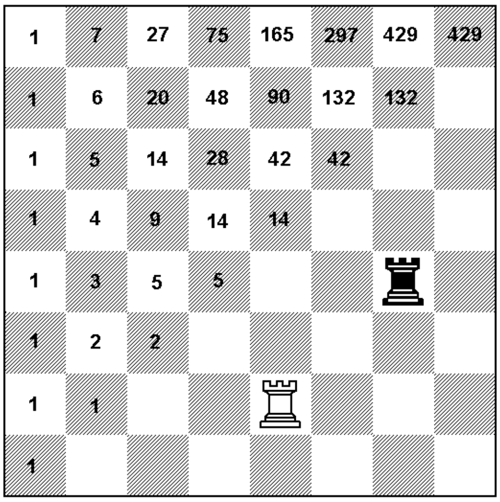
Voor deze column laat ik de geschiedenis van het getal Pi (π = 3.14159265....) beginnen met de komst van Ludolph van Ceulen (1540-1610) naar Leiden. Van Ceulen was een wiskundige die een deel van zijn tijd besteedde aan het berekenen van de decimalen van het getal Pi. Hij gebruikte hiervoor een bewerkelijke methode die afkomstig was van de Griekse wiskundige, natuurkundige, ingenieur en astronoom Archimedes (287 BC – 212 BC) die in Syracuse op Sicilië woonde. Archimedes slaagde erin om twee decimalen van Pi te bepalen. Van Ceulen kwam tot 35 decimalen. Een fantastisch resultaat dat weduwe Adriana in zijn grafsteen liet beitelen, zie Het grafschrift van Ludolph van Ceulen (2000) van R. Oomes, J. Tersteeg en J. Top. Een replica van deze grafsteen, de oorspronkelijke is verloren gegaan, is in de Pieterskerk in Leiden te zien.

Ik hoor deze en gene denken waarom zoveel decimalen? Waar zijn die goed voor? Zeker voor een schaker zijn dit natuurlijk twee nogal domme vragen. Wij schakers houden ons immers bezig met het beantwoorden van vragen als ‘Wat is het langste mat met zeven stukken?’ (Antwoord: KDp – KLTP mat in 549 zetten) en meer van dit soort wereldschokkende vragen.

De volgende anekdote, die afkomstig is van de Hongaarse fysicus Eugene Wigner, verwoordt op grappige wijze dat het getal Pi overal op kan duiken: ‘Dit is een verhaal van twee vrienden, die op de middelbare school bij elkaar in de klas zaten, en met elkaar over hun beroep praten. Een van de twee is een statisticus die zich bezighoudt met bevolkingstrends. Hij laat zijn klasgenoot een artikel van zijn hand zien. Dit artikel start zoals gebruikelijk met de Gaussische verdeling en de statisticus legt zijn vriend de betekenis van de verschillende symbolen uit. Zijn klasgenoot weet niet goed wat hij ervan moet denken en vraagt zich af of zijn vriend hem niet voor de gek houdt. “Hoe kan jij dat weten?” vraagt hij. “En wat is dat symbool daar?” “Oh,” merkt de statisticus op “dat is Pi.” “Wat is dat?” “Dat is de verhouding van de omtrek van een cirkel tot zijn diameter.” “Wel, nu ga je toch echt te ver met je grap,” zegt de klasgenoot, “het is toch overduidelijk dat de bevolking van een land niets te maken heeft met de omtrek van een cirkel.”

De prijs voor de origineelste waarneming van Pi gaat naar mijn zoon Eric die mij vanuit Tanzania een ontvangstbewijs van een creditcard met π dollar fooi toestuurde, zie de foto. Voor enkele andere plaatsen waar Pi opduikt zie de poster π everywhere, met o.a. de pendule van Huygens.

Dit leidt tot de volgende vraag. Hoe zit het met Pi en schaken? Is het mogelijk om op het schaakbord met behulp van een schaakstuk het getal Pi te construeren en zo ja hoe?



Vraag: Hoeveel *verschillende* paden kan een toren van veld a1 naar veld h8 volgen als dit stuk louter omhoog en naar rechts verzet mag worden en de toren niet beneden de a1-h8 diagonaal mag komen?

Het antwoord op deze vraag wordt gegeven door de driehoek van Catalan. We constateren dat een getal op een bepaald veld, b.v d7 (48) de som is van de getallen op het veld links c7 (20) en het veld eronder d6 (28); de getallen op de velden beneden de diagonaal a1-h8 zijn allen nul. Deze informatie stelt ons in staat om op vrij eenvoudige wijze alle getallen van de driehoek van Catalan te bepalen.

De getallen op de a1-h8 diagonaal zijn de Catalan getallen C(n). Met de formule van Stirling vinden we voor grote waarden van n dat C(n) ~ 4^n / ((n+1)*sqrt(Pi * n)) waar het ~ teken staat voor ongeveer gelijk aan. Voor n=1000 - dit vereist een schaakbord van 1001 x 1001 velden en het nodige geduld om alle berekeningen uit te voeren, gelukkig een typische eigenschap van schakers - vinden we met deze methode Pi ~ 2^(4*n)/(n*(n+1)^2*C(n)^2) ~ 3.142.

De Catalan getallen zijn vernoemd naar Eugène Charles Catalan, zie Igor Pak's History of Catalan Numbers. Volgens Henry Gould is de naam Euler-Fuss-Segner-Catalan getallen preciezer maar met John Riordan en Leonard Carlitz is hij van mening dat de enkele naam 'Catalan' afdoende is.

Hoe zit het met de andere schaakstukken en Pi? Een bezoek aan de On-Line Encyclopedia of Integer Sequences van Neil Sloane leert ons dat het ook met koning, dame, loper en paard mogelijk is om het getal Pi bij benadering te berekenen, zie onderstaande tabel.

#	OEIS	Auteur	Schaakstuk	a(n) (asymptotisch = n zeer groot)
1	A094061	Matthijs Coster	Koning	2^(3*n+1)/(3***Pi***n)
2	A132595	Martin J. Erickson	Dame	5^(3/4)*(sqrt(5)-2)*(6+2*sqrt(5))^n/(16*sqrt(**Pi***n))
3	A051708	Joe Keane	Toren	sqrt(2)*9^n/(27*sqrt(**Pi***n))
4	A254129	David A. Corneth	Paard	64^n / (5***Pi***n)
5	A199033	Vaclav Kotesovec	Loper	3^(3*n+4)/(2^(2*n+5)*sqrt(3***Pi***n))

Binnenkort, op maart 14, viert men Pi-dag. Ik stel voor dat wij allen op 14 maart een dagje vrij nemen en met de trein naar Leiden gaan om daar in de Pieterskerk onder meer het Pi-monument te bezichtigen. Boek bijtijds een rondleiding en laat je verrassen (ook Boerhaave en Snel liggen in deze kerk begraven). Als passende afsluiting van deze Pi-dag geef ik een ieder in overweging om in een van de vele Italiaanse restaurants die Leiden rijk is pizza te gaan eten. In 250 BC deed Archimedes dat in Syracuse ook op de dag dat hij vaststelde dat 3+10/71 < π < 3+10/70.